Teorema (Caratterizzazione degli insiemi chiusi)
Sia $E \subset \mathbb{R}$. Allora, E è chiuso se e solo se comunque si prenda una successione $\{x_n\} \subseteq E$ (cioè $x_n \in E$, per ogni n) convergente, si ha che $\lim x_n \in E$.

Dimostrazione Sia E chiuso e $\{x_n\} \subseteq E$ convergente e sia $x = \lim x_n$. Se per assurdo $x \in E^c$ esisterebbe (essendo E^c aperto) un intorno U di x tutto contenuto in E^c e poiché $x = \lim x_n$, la successione $\{x_n\}$ apparterrebbe definitivamente a $U \subseteq E^c$ contraddicendo il fatto che $x_n \in E$ per ogni n.

Dimostriamo ora che se vale che comunque si prenda una successione $\{x_n\} \subseteq E$ convergente, $\lim x_n \in E$, allora E è chiuso. Supponiamo, per assurdo, che E non sia chiuso, ossia che E^c non sia aperto. Questo implica che esiste un punto $x \in E^c$ tale che ogni intorno U di x contiene punti di E; quindi prendendo intorni della forma $U_n := (x - 1/n, x + 1/n)$ troviamo una successione di punti $x_n \in E \cap U_n$; ma questo significa che la successione $\{x_n\} \subseteq E$ e converge ad $x \notin E$ che contraddice l'ipotesi.